三维 Helmholtz 方程在扰动的共轴波导上的解的存在唯一性*

刘立汉
（重庆师范大学数学学院，重庆 401331）

摘　要：在允许导波存在的情况下，研究了三维 Helmholtz 方程在扰动的共轴波导上的解的存在唯一性。对扰动项和点源项的假设要求很少。首先，在知道三维齐次 Helmholtz 方程在无扰动的共轴波导的 Green 函数的基础上，引进了一个推广的 Sommerfeld-Rellich 辐射条件（输出辐射条件）。然后，证明了满足给定的辐射条件的三维 Helmholtz 方程在扰动的共轴波导上的解的存在性及唯一性。

关键词：Helmholtz 方程；共轴波导；扰动；解的存在性；解的唯一性；Green 函数；辐射条件

中图分类号：O175　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2014）03－0035－08

The Uniqueness and Existence of Solutions for the 3-D Helmholtz Equation in a Coaxial Waveguide with Unbounded Perturbation

LIU Lihan
（School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China）

Abstract: The 3-D Helmholtz equation in a coaxial waveguide with unbounded perturbation is studied, allowing the presence of guided waves, while a few assumptions on the perturbation and the source term are adapted. On the basis of the Green's function for the 3-D homogeneous Helmholtz equation in a coaxial waveguide without perturbation, a generalized (out-going) Sommerfeld-Rellich radiation condition is introduced. And then the uniqueness and existence of solutions for the studied 3-D Helmholtz equation satisfying some radiation conditions are proven.

Key words: Helmholtz equation; coaxial waveguide; unbounded perturbation; existence of solutions; uniqueness of solutions; Green's function; radiation condition

本文考虑在扰动的共轴波导上的三维 Helmholtz 方程

$$\Delta u(x_1,x_2,z) + [k^2n^2(x_1,x_2) + p(x_1,x_2,z)]u(x_1,x_2,z) = f(x_1,x_2,z),\ (x_1,x_2,z) \in \mathbf{R}^3 \quad (1)$$

其中

$$n(x_1,x_2) = \begin{cases} n_{cl}, & 0 \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2} < a, \\ n_{co}, & a \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2} < R, \\ n_{cl}, & \sqrt{x_1^2+x_2^2} \geqslant R \end{cases} \quad (2)$$

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 是拉普拉斯算子，k, n_{co}, n_{cl}, a, R 都是正常数且 $n_{co} > n_{cl}$ 和函数 $p(x_1,x_2,z)$ 是满足如下假设条件的扰动项：

（A1）函数 $p(x_1,x_2,z) \in L^1(\mathbf{R}^3)$ 和对于 $R' > 0$，当 $\sqrt{x_1^2+x_2^2} > R'$ 时，$p(x_1,x_2,z) = 0$；

（A2）函数 $p(x_1,x_2,z)$ 还满足

$$\sup_{(\xi_1,\xi_2,\zeta)\in\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3} |G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta) \cdot p(x_1,x_2,z)| \, dx_1 dx_2 dz < 1 \quad (3)$$

* **收稿日期：**2013－09－16
基金项目：2013 年重庆高校创新团队建设计划资助项目（KJTD201308）；重庆师范大学基金项目资助项目（13XLB015）
作者简介：刘立汉（1987 年生），男；**研究方向：**偏微分方程；E-mail：mathsedu2013@163.com

其中 $G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)$ 是三维齐次 Helmholtz 方程在无扰动的共轴波导上的 Green 函数（更多细节见第 1 节）。

我们的工作主要是由在共轴导波中电磁波的研究所导出的。当函数 $p(x_1,x_2,z)\equiv 0$，方程（1）描述了在共轴波导上的电磁波的传播，其中 k 是波数，函数 $n(x_1,x_2)$ 是折射率，函数 $f(x_1,x_2,z)$ 是点源项，R 是波导的半径和函数 $u(x_1,x_2,z)$ 是时间调和的电磁波速率势能。在文［1］，我们引进了一个推广的 Sommerfeld-Rellich 辐射条件（输出辐射条件）：对所有的导波分支和自由波分支都有一个类似 Sommerfeld 辐射条件，然后我们研究了三维 Helmholtz 方程在扰动的分层介质上的解的存在唯一性，也就是这个折射率是一个一元函数。然而，当波导是共轴的情况，也就是这个折射率是一个二元函数，目前还不清楚它的合适的辐射条件，因此本文我们引进了另一个推广的 Sommerfeld-Rellich 辐射条件（输出辐射条件），然后我们考虑了满足给定辐射条件的扰动的共轴波导上的三维 Helmholtz 方程的解的存在唯一性。

正如文［1-3］所示，我们将利用如下记号。在不同的坐标系下，三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的一个点分别记为：

$$P=(x_1,x_2,z)\sim(r,\theta,z),P'=(\xi_1,\xi_2,\zeta)\sim(r',\theta',\zeta)$$

它们有如下关系：

$$|P|^2=r^2+z^2=x_1^2+x_2^2+z^2,x_1=r\cos\theta,x_2=r\sin\theta,$$

$$|P'|^2=r'^2+\zeta^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\zeta^2,\xi_1=r'\cos\theta',\xi_2=r'\sin\theta'$$

本文内容安排如下：在第 1 节，我们回顾了三维齐次 Helmholtz 方程在无扰动的共轴波导上的 Green 函数和它的渐近性质；在第 2.1 节，我们将证明满足后面将给出的某个输出辐射条件的三维 Helmholtz 方程（1）的解的唯一性；在第 2.2 节，我们将证明满足后面将给出的某个输出辐射条件的三维 Helmholtz 方程（1）的解的存在性。

事实上，我们的方法也许可以推广到任何其它类型的共轴波导上，如最近得到广泛应用的“全绝缘波导”[4-5]，于是可以得到类似的结果。

1 Green 函数

1.1 三维 Helmholtz 方程在共轴波导上的 Green 函数

在这一小节，我们回顾三维齐次 Helmholtz 方程在无扰动的共轴波导上的 Green 函数[6-7]。这个 Green 函数后面将用来构造三维 Helmholtz 方程（1）的解。

在柱面坐标下，无扰动的共轴波导上的三维齐次 Helmholtz 方程为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+k^2n^2(r)u(r,\theta,z)=0 \tag{4}$$

求这个方程的一个分离变量的解

$$u(r,\theta,z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\beta z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}v(r)$$

其中 $\beta\in C$ 和 $m\in\mathbf{Z}$，则 $v(r)$ 必须满足如下常微分方程：

$$v''(r)+\frac{1}{r}v'(r)+\left[k^2n^2(r)-k^2\beta^2-\frac{m^2}{r^2}\right]v(r)=0 \tag{5}$$

定义

$$d^2=k^2(n_{co}^2-n_{cl}^2),l=k^2(n_{co}^2-\beta^2),$$
$$q(r)=k^2[n_{co}^2-n^2(r)] \tag{6}$$

那么这个方程就变形为

$$v''(r)+\frac{1}{r}v'(r)+\left[l-q(r)-\frac{m^2}{r^2}\right]v(r)=0 \tag{7}$$

函数 $q(r)$ 变形为

$$q(r)=\begin{cases}d^2, & 0\leqslant r<a,\\ 0, & a\leqslant r<R,\\ d^2, & r\geqslant R\end{cases} \tag{8}$$

我们把（7）式看成是关于 $l\in C$ 的特征值问题，并且称它为方程（4）的特征值问题[8-9]。从文［6-7］中，可以得到方程（4）的 Green 函数 $G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)$：

$$G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)=$$
$$\frac{1}{2\pi^2\sqrt{rr'}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|z-\zeta|\sqrt{k^2n_{co}^2-\lambda}}}{2\mathrm{i}\sqrt{k^2n_{co}^2-\lambda}}\cdot$$
$$j_m(r,\lambda)j_m(r',\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\theta')}\mathrm{d}\chi_m(\lambda),0<r,r';$$
$$0\leqslant\theta,\theta'\leqslant 2\pi;z,\zeta\in\mathbf{R} \tag{9}$$

其中当 $\lambda\in(-\infty,0]$ 时，函数 $\chi_m(\lambda)$ 恒等于 0；当 $\lambda\in(0,d^2]$ 时，函数 $\chi_m(\lambda)$ 是一个只有有限个不连续点的分段常值函数；当 $\lambda\in(d^2,\infty)$ 时，函数 $\chi_m(\lambda)$ 是一个连续函数。设 $0<\lambda_1^m<\cdots<\lambda_{P_m}^m\leqslant d^2$ 是这些不连续点，且设 $r_1^m,\cdots,r_{P_m}^m$ 为其对应的跳跃值。

当 $\lambda>d^2$ 时，

$$j_m(r,\lambda)=\begin{cases}\alpha_m(\lambda)\sqrt{r}J_m(\sqrt{\lambda-d^2}r),0\leqslant r<a;\\ \frac{\pi}{2}\sqrt{r}[\beta_m(\lambda)J_m(\sqrt{\lambda}r)+\gamma_m(\lambda)Y_m(\sqrt{\lambda}r)],\\ \quad a\leqslant r<R;\\ (\frac{\pi}{2})^2\sqrt{r}[\delta_m(\lambda)J_m(\sqrt{\lambda-d^2}r)+\\ \quad\varepsilon_m(\lambda)Y_m(\sqrt{\lambda-d^2}r)],r\geqslant R\end{cases} \tag{10}$$

其中 J_m, Y_m 分别是 m 阶第一型 Bessel 函数和第二型 Bessel 函数，

$$\alpha_m(\lambda) = (-1)^{(|m|-m)/2}|m|!2^{|m|}(\lambda - d^2)^{-|m|/2},$$

$$\beta_m(\lambda) = \alpha_m(\lambda)a[\sqrt{\lambda}J_m(\sqrt{\lambda - d^2}a)Y'_m(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\lambda - d^2}J'_m(\sqrt{\lambda - d^2}a)Y_m(\sqrt{\lambda}a)],$$

$$\gamma_m(\lambda) = -\alpha_m(\lambda)a[\sqrt{\lambda}J_m(\sqrt{\lambda - d^2}a)J'_m(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\lambda - d^2}J'_m(\sqrt{\lambda - d^2}a)J_m(\sqrt{\lambda}a)],$$

$$\delta_m(\lambda) = -R\{\beta_m(\lambda)[\sqrt{\lambda}Y_m(\sqrt{\lambda - d^2}R)\cdot J'_m(\sqrt{\lambda}R) - \sqrt{\lambda - d^2}Y'_m(\sqrt{\lambda - d^2}R)J_m(\sqrt{\lambda}R)] + \gamma_m(\lambda)[\sqrt{\lambda}Y_m(\sqrt{\lambda - d^2}R)Y'_m(\sqrt{\lambda}R) - \sqrt{\lambda - d^2}Y'_m(\sqrt{\lambda - d^2}R)Y_m(\sqrt{\lambda}R)]\},$$

$$\varepsilon_m(\lambda) = R\{\beta_m(\lambda)[\sqrt{\lambda}J_m(\sqrt{\lambda - d^2}R)\cdot J'_m(\sqrt{\lambda}R) - \sqrt{\lambda - d^2}J'_m(\sqrt{\lambda - d^2}R)J_m(\sqrt{\lambda}R)] + \gamma_m(\lambda)[\sqrt{\lambda}J_m(\sqrt{\lambda - d^2}R)Y'_m(\sqrt{\lambda}R) - \sqrt{\lambda - d^2}J'_m(\sqrt{\lambda - d^2}R)Y_m(\sqrt{\lambda}R)]\} \quad (11)$$

$$d\chi_m(\lambda) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{d\lambda}{\delta_m^2(\lambda) + \varepsilon_m^2(\lambda)}, \lambda \in (d^2, \infty) \quad (12)$$

当 $0 < \lambda < d^2$ 时，设 $\lambda = \lambda_j^m (j = 1,2,\cdots,P_m)$ 为函数 $\chi_m(\lambda)$ 在这个区间内的不连续点，则函数 $\chi_m(\lambda)$ 在 λ 点处不连续的条件是

$$[\sqrt{\lambda}I_m(\sqrt{d^2 - \lambda}a)Y'_m(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{d^2 - \lambda}I'_m(\sqrt{d^2 - \lambda}a)Y_m(\sqrt{\lambda}a)]\cdot[\sqrt{\lambda}K_m(\sqrt{d^2 - \lambda}R)J'_m(\sqrt{\lambda}R) - \sqrt{d^2 - \lambda}K'_m(\sqrt{d^2 - \lambda}R)J_m(\sqrt{\lambda}R)] - [\sqrt{\lambda}I_m(\sqrt{d^2 - \lambda}a)J'_m(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{d^2 - \lambda}I'_m(\sqrt{d^2 - \lambda}a)J_m(\sqrt{\lambda}a)]\cdot[\sqrt{\lambda}K_m(\sqrt{d^2 - \lambda}R)Y'_m(\sqrt{\lambda}R) - \sqrt{d^2 - \lambda}K'_m(\sqrt{d^2 - \lambda}R)Y_m(\sqrt{\lambda}R)] = 0 \quad (13)$$

其中 I_m, K_m 是分别是 m 阶的第一型修正的 Bessel 函数和第二型修正的 Bessel 函数，

$$j_m(r,\lambda) = \begin{cases} \bar{\alpha}_m(\lambda)\sqrt{r}I_m(\sqrt{d^2 - \lambda}r), 0 \leqslant r < a, \\ \frac{\pi}{2}\sqrt{r}[\bar{\beta}_m(\lambda)J_m(\sqrt{\lambda}r) + \bar{\gamma}_m(\lambda)Y_m(\sqrt{\lambda}r)], \\ \quad a \leqslant r < R, \\ \bar{\delta}_m(\lambda)\sqrt{r}K_m(\sqrt{d^2 - \lambda}r), r \geqslant R \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\bar{\alpha}_m(\lambda) = |m|!2^{|m|}(d^2 - \lambda)^{-|m|/2},$$

$$\bar{\beta}_m(\lambda) = \bar{\alpha}_m(\lambda)a[\sqrt{\lambda}I_m(\sqrt{d^2 - \lambda}a)Y'_m(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{d^2 - \lambda}I'_m(\sqrt{d^2 - \lambda}a)Y_m(\sqrt{\lambda}a)],$$

$$\bar{\gamma}_m(\lambda) = -\bar{\alpha}_m(\lambda)a[\sqrt{\lambda}I_m(\sqrt{d^2 - \lambda}a)\cdot J'_m(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{d^2 - \lambda}I'_m(\sqrt{d^2 - \lambda}a)J_m(\sqrt{\lambda}a)],$$

$$\bar{\delta}_m(\lambda) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\bar{\beta}_m(\lambda)J_m(\sqrt{\lambda}R) + \bar{\gamma}_m(\lambda)Y_m(\sqrt{\lambda}R)}{K_m(\sqrt{d^2 - \lambda}R)} \quad (15)$$

函数 $\chi_m(\lambda)$ 在不连续点 $\lambda = \lambda_j^m (j = 1,2,\cdots,P_m)$ 处的跳跃值 $r_j^m (j = 1,2,\cdots,P_m)$ 是

$$r_j^m = \frac{2\pi\lambda_j^m d^{-2}(d^2 - \lambda_j^m)}{\bar{\alpha}_m(\lambda_j^m)^2[A_j^m - \bar{\delta}_m(\lambda_j^m)^2 B_j^m]} \quad (16)$$

其中

$$A_j^m = m^2 I_m(\sqrt{d^2 - \lambda_j^m}a)^2 - (d^2 - \lambda_j^m)a^2 I'_m(\sqrt{d^2 - \lambda_j^m}a)^2,$$

$$B_j^m = m^2 K_m(\sqrt{d^2 - \lambda_j^m}R)^2 - (d^2 - \lambda_j^m)R^2 K'_m(\sqrt{d^2 - \lambda_j^m}R)^2$$

最后，当 $\lambda = d^2$ 时，设 $\lambda = \lambda_j^m (j = 1,2,\cdots,P_m)$ 为函数 $\chi_m(\lambda)$ 在这个区间内的不连续点，则函数 $\chi_m(\lambda)$ 在 $\lambda = d^2$ 点处不连续的条件是

$$\frac{d[\bar{\beta}_m(\lambda)J'_m(Rd) + \bar{\gamma}_m(\lambda)Y'_m(Rd)]}{\bar{\beta}_m(\lambda)J_m(Rd) + \bar{\gamma}_m(\lambda)Y_m(Rd)} = -\frac{|m|}{R} \quad (17)$$

$$j_m(r,\lambda) = \begin{cases} r^{|m|+1/2}, 0 \leqslant r < a, \\ \frac{\pi}{2}\sqrt{r}[\bar{\beta}_m(\lambda)J_m(rd) + \bar{\gamma}_m(\lambda)Y_m(rd)], \\ \quad a \leqslant r < R, \\ \bar{\delta}_m(\lambda)r^{1-|m|}, r \geqslant R \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$\hat{\beta}_m(\lambda) = \alpha_m(\lambda)a[\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda - d^2}a)^{|m|+1/2}Y'_m(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\lambda - d^2}(\sqrt{\lambda - d^2}a)^{|m|-1/2}Y_m(\sqrt{\lambda}a)],$$

$$\hat{\gamma}_m(\lambda) = -\alpha_m(\lambda)a[\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda - d^2}a)^{|m|+1/2}J'_m(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\lambda - d^2}(\sqrt{\lambda - d^2}a)^{|m|-1/2}J_m(\sqrt{\lambda}a)],$$

$$\bar{\delta}_m(d^2) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\bar{\beta}_m(\lambda)J_m(Rd) + \bar{\gamma}_m(\lambda)Y_m(Rd)}{R^{1/2-|m|}},$$

$$\bar{\varepsilon}_m(d^2) = \frac{\pi}{2}[\bar{\beta}_m(\lambda)J_m(Rd) + \bar{\gamma}_m(\lambda)Y_m(Rd)] \quad (19)$$

函数 $\chi_m(\lambda)$ 在不连续点 $\lambda = \lambda_j^m = d^2 (j = 1,2,\cdots,P_m)$ 处的跳跃值 $r_j^m (j = 1,2,\cdots,P_m)$ 是

$$r_j^m = \frac{2\pi(m^2 - 1)}{|m|[\bar{\varepsilon}_m(d^2)^2 R^2(|m| + 1) - a^2(|m| - 1)]} \quad (20)$$

1.2　Green 函数的渐近性质

在这一小节，我们给出如下引理。

引理1 设函数 $G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)$ 是由（9）式所给出的Green函数，则对于任意给定的 r',θ',ζ，我们有

$$\lim_{r\to 0}\left\{j_m(r,\lambda)\frac{\partial[\sqrt{r}G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)]}{\partial r}-\frac{\partial j_m(r,\lambda)}{\partial r}[\sqrt{r}G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)]\right\}=0 \quad (21)$$

$$\lim_{r\to \infty}\left\{j_m(r,\lambda)\frac{\partial[\sqrt{r}G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)]}{\partial r}-\frac{\partial j_m(r,\lambda)}{\partial r}[\sqrt{r}G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)]\right\}=0 \quad (22)$$

证明 我们需要考虑三种情况：$0<\lambda<d^2,\lambda=d^2,\lambda>d^2$，在每一个区间内 $j_m(r,\lambda)$ 和 $G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)$ 都有不同的性质。只证明（21）式，（22）式可类似地证明。

第一种情形：当 $0<\lambda<d^2$ 时，由（14）式，有

$$j_m(r,\lambda)=\bar{\alpha}_m(\lambda)\sqrt{r}I_m(\sqrt{d^2-\lambda}r),\text{当 } r\to 0$$

又由文［10］（或文［11］）的（9.6.6）和（9.6.7）式，有

$$I_m(s)\sim\frac{1}{m!}\left(\frac{s}{2}\right)^m,m\geqslant 0,s\to 0$$

和

$$I_{-m}(s)=I_m(s),m\in\mathbf{Z}$$

则可以得到

$$m\geqslant 0,j_m(r,\lambda)\sim\bar{\alpha}_m(\lambda)\sqrt{r}\frac{1}{m!}\left(\frac{\sqrt{d^2-\lambda}r}{2}\right)^m=\bar{\alpha}_m(\lambda)\frac{(d^2-\lambda)^{m/2}}{m!2^m}r^{m+1/2},r\to 0,$$

$$m<0,j_m(r,\lambda)\sim\bar{\alpha}_m(\lambda)\sqrt{r}\frac{1}{(-m)!}\left(\frac{\sqrt{d^2-\lambda}r}{2}\right)^{-m}=\bar{\alpha}_m(\lambda)\frac{(d^2-\lambda)^{-m/2}}{(-m)!2^{-m}}r^{-m+1/2},r\to 0$$

记

$$\bar{a}_m(\lambda)=\bar{\alpha}_m(\lambda)\frac{(d^2-\lambda)^{|m|/2}}{|m|!2^{|m|}}$$

则

$$j_m(r,\lambda)\sim\bar{a}_m(\lambda)r^{|m|+1/2},r\to 0,$$

$$\frac{\partial j_m(r,\lambda)}{\partial r}\sim\bar{a}_m(\lambda)(|m|+\frac{1}{2})r^{|m|-1/2},r\to 0$$

并且由（9）式，有

$$G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)=O(r^{|m|}),r\to 0,$$

$$\frac{\partial[\sqrt{r}G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)]}{\partial r}=O(r^{|m|-1/2}),r\to 0$$

因此，通过简单的计算立即可以得到（21）式。

第二种情形：当 $\lambda=d^2$ 时，由（18）式得

$$j_m(r,\lambda)=r^{|m|+1/2},\quad\text{当 } r\to 0$$

则可以得到

$$\frac{\partial j_m(r,\lambda)}{\partial r}=(|m|+\frac{1}{2})r^{|m|-1/2},r\to 0,$$

$$G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)=O(r^{|m|}),r\to 0,$$

$$\frac{\partial[\sqrt{r}G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)]}{\partial r}=O(r^{|m|-1/2}),r\to 0$$

因此，通过简单的计算立即可以得到（21）式。

第三种情形：当 $\lambda>d^2$ 时，由（10）式，我们有

$$j_m(r,\lambda)=\alpha_m(\lambda)\sqrt{r}J_m(\sqrt{\lambda-d^2}r),\text{当 } r\to 0$$

又由文［10］（或文［11］）的（9.1.5）和（9.1.7）式，有

$$J_m(s)\sim\frac{1}{m!}\left(\frac{s}{2}\right)^m,m\geqslant 0,s\to 0$$

和

$$J_{-m}(s)=(-1)^mJ_m(s),m\in\mathbf{Z}$$

则可以得到

$$m\geqslant 0,j_m(r,\lambda)\sim\alpha_m(\lambda)\sqrt{r}\frac{1}{m!}\left(\frac{\sqrt{\lambda-d^2}r}{2}\right)^m=\alpha_m(\lambda)\frac{(\lambda-d^2)^{m/2}}{m!2^m}r^{m+1/2},r\to 0,$$

$$m<0,j_m(r,\lambda)\sim\alpha_m(\lambda)\sqrt{r}(-1)^m\frac{1}{(-m)!}\left(\frac{\sqrt{\lambda-d^2}r}{2}\right)^{-m}=\alpha_m(\lambda)(-1)^m\frac{(\lambda-d^2)^{-m/2}}{(-m)!2^{-m}}r^{-m+1/2},r\to 0$$

记

$$a_m(\lambda)=\alpha_m(\lambda)(-1)^{(m-|m|)/2}\frac{(\lambda-d^2)^{|m|/2}}{|m|!2^{|m|}}$$

则

$$j_m(r,\lambda)\sim a_m(\lambda)r^{|m|+1/2},r\to 0,$$

$$\frac{\partial j_m(r,\lambda)}{\partial r}\sim a_m(\lambda)(|m|+\frac{1}{2})r^{|m|-1/2},r\to 0$$

并且由（9）式，有

$$G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)=O(r^{|m|}),r\to 0,$$

$$\frac{\partial[\sqrt{r}G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)]}{\partial r}=O(r^{|m|-1/2}),r\to 0$$

因此，通过简单的立即可以得到（21）式。

定义

$$\bar{G}(\lambda,\theta,z;r',\theta',\zeta)=\int_0^{+\infty}j_m(\rho,\lambda)\sqrt{\rho}G(\rho,\theta,z;r',\theta',\zeta)\mathrm{d}\rho$$

则可以得到如下的引理。

引理2 设函数 $\bar{G}(\lambda,\theta,z;r',\theta',\zeta)$ 定义如上。则对于任意给定的 r',θ',ζ，我们有

$$\begin{cases} \lim\limits_{|z|\to\infty}\left[\dfrac{\partial\bar{G}(\lambda,\theta,z;r',\theta',\zeta)}{\partial|z|}-\right. \\ \left.\mathrm{i}\sqrt{k^2n_{co}^2-\lambda}\,\bar{G}(\lambda,\theta,z;r',\theta',\zeta)\right]=0, \\ \lambda\leqslant k^2n_{co}^2 \text{ 和 } d\chi_m(\lambda)\neq 0, \\ \lim\limits_{|z|\to\infty}\bar{G}(\lambda,\theta,z;r',\theta',\zeta)=0,\lambda>k^2n_{co}^2 \end{cases} \tag{23}$$

证明 由（10）、（14）、（18）式和由（9）式所定义的 Green 函数 $G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)$，可以得到

$$\begin{cases} \lim\limits_{|z|\to\infty}\left[\dfrac{\partial G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)}{\partial|z|}-\right. \\ \left.\mathrm{i}\sqrt{k^2n_{co}^2-\lambda}\,G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)\right]=0, \\ \lambda\leqslant k^2n_{co}^2 \text{ 和 } d\chi_m(\lambda)\neq 0, \\ \lim\limits_{|z|\to\infty}G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)=0,\lambda>k^2n_{co}^2 \end{cases}$$

于是，由 Fubini-Tonelli 定理，容易就可以立即得到（23）式。

引理 3 设 $(r,\theta,z),(r',\theta',\zeta)\in\mathbf{R}^3$ 和 $|P-P'|=(r\cos\theta-r'\cos\theta',r\sin\theta-r'\sin\theta',z-\zeta)$ 且 $|P-P'|<1$，则存在一个不依赖于 $r,\theta,z,r',\theta',\zeta$ 的正常数 C_1，使得

$$\left|G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)-\frac{1}{4\pi|P-P'|}\right|\leqslant C_1 \tag{24}$$

证明 这个引理的证明类似于文［12］的引理 2.19 的证明，因此在这省略。

2 三维 Helmholtz 方程在扰动的共轴波导上的解的存在唯一性

2.1 三维 Helmholtz 方程在扰动的共轴波导上的解的唯一性

我们将给出推广的 Sommerfeld-Rellich 辐射条件，并称它为输出辐射条件：首先，我们假设

$$u\in C^1(\mathbf{R}^3)\cap L^2(\mathbf{R}^3) \tag{25}$$

其次，假设对所有 $m\in\mathbf{Z},z\in\mathbf{R}$，如下等式成立：

$$\lim_{r\to\infty}\left\{j_m(r,\lambda)\frac{\partial[\sqrt{r}u_m(r,z)]}{\partial r}-\frac{\partial j_m(r,\lambda)}{\partial r}[\sqrt{r}u_m(r,z)]\right\}=0 \tag{26}$$

其中函数 $u_m(r,z)$ 是如下 Fourier 级数的 Fourier 系数：

$$u(r,\theta,z)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}u_m(r,z)$$

我们定义函数 $U_m(\lambda,z)$ 是函数 $r\to\sqrt{r}u_m(r,z)$ 的变换，定义如下：

$$U_m(\lambda,z)=\int_0^{+\infty}j_m(\rho,\lambda)\sqrt{\rho}u_m(\rho,z)\mathrm{d}\rho$$

最后，

$$\begin{cases} \lim\limits_{|z|\to\infty}\left[\dfrac{\partial U_m(\lambda,z)}{\partial|z|}-\mathrm{i}\sqrt{k^2n_{co}^2-\lambda}\,U_m(\lambda,z)\right]=0, \\ \lambda\leqslant k^2n_{co}^2 \text{ 和 } d\chi_m(\lambda)\neq 0, \\ \lim\limits_{|z|\to\infty}U_m(\lambda,z)=0,\quad \lambda>k^2n_{co}^2 \end{cases} \tag{27}$$

这些条件都是由其物理意义所得到的，详情请见文［6-7］和那里提到的参考文献。

引理 4 设函数 $u(x_1,x_2,z)\in L^2(\mu)$ 满足方程

$$\Delta u(x_1,x_2,z)+[k^2n^2(x_1,x_2)+p(x_1,x_2,z)]u(x_1,x_2,z)=0 \tag{28}$$

其中函数 $n(x_1,x_2)$ 由（2）式所给定，则当 $\lambda>k^2n_{co}^2$ 时，

$$\lim_{|z|\to\infty}u(x_1,x_2,z)\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda-k^2n_{co}^2}|z|}=\lim_{|z|\to\infty}u_z(x_1,x_2,z)\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda-k^2n_{co}^2}|z|}=0 \tag{29}$$

证明 一方面，由于函数 $u(x_1,x_2,z)$ 是方程（28）的一个解，从文［1］，可以得到函数 $|\nabla u(x_1,x_2,z)|^2\mu(x_1,x_2,z)$ 和函数 $|\nabla^2u(x_1,x_2,z)|^2\mu(x_1,x_2,z)$ 在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 上是可积的。因此，很容易得到函数

$$\Phi(x_1,x_2,z)=u(x_1,x_2,z)\mu^{\frac{1}{2}}(x_1,x_2,z)$$

属于 Sobolev 空间 $W^{2,2}(\mathbf{R}^3)$。由 Sobolev 嵌入定理[13]，可以得到函数 $\Phi(x_1,x_2,z)\in L^\infty(\mathbf{R}^3)$，因此，立即可得到（29）式中的第一个极限。

另一方面，接下来证明（29）式中的第二个极限。通过简单计算可知，函数 $\Phi(x_1,x_2,z)$ 满足如下方程：

$$\Delta\Phi(x_1,x_2,z)+b(x_1,x_2,z)\cdot\nabla\Phi(x_1,x_2,z)+c(x_1,x_2,z)\Phi(x_1,x_2,z)=0,$$

其中

$$b(x_1,x_2,z)=(-\mu^{-1}\mu_{x_1},-\mu^{-1}\mu_{x_2},-\mu^{-1}\mu_z)=-\mu^{-1}\cdot\nabla\mu,$$

$$\begin{aligned} c(x_1,x_2,z)={}&k^2n^2(x_1,x_2)+p(x_1,x_2,z)+\\ &\frac{1}{4}\mu^{-2}\mu_{x_1}+\frac{1}{4}\mu^{-2}\mu_{x_2}+\frac{1}{4}\mu^{-2}\mu_z+\\ &\frac{1}{2}\mu^{-2}\mu_{x_1}^2+\frac{1}{2}\mu^{-2}\mu_{x_2}^2+\frac{1}{2}\mu^{-2}\mu_z^2-\\ &\frac{1}{2}\mu^{-1}\mu_{x_1x_1}-\frac{1}{2}\mu^{-1}\mu_{x_2x_2}-\frac{1}{2}\mu^{-1}\mu_{zz}=\\ &k^2n^2(x_1,x_2)+p(x_1,x_2,z)+\frac{1}{4}\mu^{-2}(\mu_{x_1}+\mu_{x_2}+\mu_z)+\\ &\frac{1}{2}\mu^{-2}(\mu_{x_1}^2+\mu_{x_2}^2+\mu_z^2)-\frac{1}{2}\mu^{-1}\nabla\mu \end{aligned}$$

都是关于 (x_1,x_2,z) 的函数。

由于函数 $\Phi(x_1,x_2,z)\in W^{2,2}(\mathbf{R}^3)$，并且由文［14］的定理 8.10，可以得到函数 $\Phi(x_1,x_2,z)\in W^{3,2}(H_+)$，其中 $H_+=\{(x_1,x_2,z)\in\mathbf{R}^3\parallel z|\geqslant h\}$，$h>0$ 是一个常数。再次利用 Sobolev 嵌入定理，可以得到函数 $|\nabla\Phi(x_1,x_2,z)|\in L^\infty(H_+)$，因此，立即可得到（29）式中的第二个极限。

设函数 $u(x_1,x_2,z)=u(r,\theta,z)$ 是三维 Helmholtz 方程（1）的一个解，我们定义如下函数：

$$\bar{u}(\lambda,\theta,z)=\int_0^{+\infty}j_m(\rho,\lambda)\sqrt{\rho}u(\rho,\theta,z)\mathrm{d}\rho$$

$$U(r,\theta,z)=\frac{1}{\pi\sqrt{r}}\int_{-\infty}^{+\infty}j_m(r,\lambda)\bar{u}(\lambda,\theta,z)\mathrm{d}\chi_m(\lambda)$$

则有

引理 5 设函数 $u(x_1,x_2,z)=u(r,\theta,z)$ 是方程（28）的一个弱解，并且函数 $U(r,\theta,z)$ 定义如上，则函数 $U(r,\theta,z)$ 是方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+k^2n^2(r)u(r,\theta,z)=-\psi(r,\theta,z),\tag{30}$$

的一个弱解，其中

$$\psi(r,\theta,z)=\frac{1}{\pi\sqrt{r}}\int_{-\infty}^{+\infty}j_m(r,\lambda)\cdot\int_0^{+\infty}j_m(\rho,\lambda)\sqrt{\rho}p(\rho,\theta,z)u(\rho,\theta,z)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\chi_m(\lambda)\tag{31}$$

证明 这个引理的证明类似于文献［1］的引理 6 的证明，因此在这省略。

引理 6 设点 (r',θ',ζ) 是固定的，并且 R' 充分大使得点 $(r',\theta',\zeta)\in\Omega_{R'}$，又设函数 $u(r,\theta,z)$ 是方程（32）的一个解，则有如下等式：

$$\frac{1}{\pi\sqrt{r}}\int_{-\infty}^{+\infty}j_m(r,\lambda)\int_0^{R'}j_m(\rho,\lambda)\sqrt{\rho}u(\rho,\theta,z)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\chi_m(\lambda)+\int_{\Omega_{R'}}G\psi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_{\partial\Omega_{R'}}\left(u\frac{\partial G}{\partial\nu}-G\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}s\tag{32}$$

其中 $\Omega_{R'}=\{(r,\theta,z)\mid(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2+z^2\leqslant(R')^2\}$，函数 $\psi(r,\theta,z)$ 由（31）式所给定和 ν 是 $\Omega_{R'}$ 的向外的法向。

证明 容易验证函数 $\Delta G+k^2n^2(r)G$ 有一个奇点 $(\theta,z)\equiv(\theta',\zeta)$。于是，由引理 5 我们可以得到，

$$\int_{\Omega_{R'}\setminus\Omega_\varepsilon}(u\Delta G-G\Delta u)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=$$

$$\int_{\Omega_{R'}\setminus\Omega_\varepsilon}[u(\Delta G+k^2n^2(r)G)-G(\Delta u+k^2n^2(r)u)]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=$$

$$\int_{\Omega_{R'}\setminus\Omega_\varepsilon}[u(\Delta G+k^2n^2(r)G)+G\psi]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

其中 $\Omega_\varepsilon=\{(r,\theta,z)\in\mathbf{R}^3\mid(r\cos\theta-r'\cos\theta')^2+(r\sin\theta-r'\sin\theta')^2+(z-\zeta)^2\leqslant\varepsilon^2\}$。

由上述公式和第二 Green 公式，我们可以得到

$$\int_{\partial(\Omega_{R'}\setminus\Omega_\varepsilon)}\left(u\frac{\partial G}{\partial\nu}-G\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}s=\int_{\Omega_{R'}\setminus\Omega_\varepsilon}[u(\Delta G+k^2n^2(r)G)+G\psi]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\tag{33}$$

因此，通过在上述等式（33）当 $\varepsilon\to0^+$ 取极限，我们很容易就可以立即得到（32）式。

故得到本文的第一个结果：

定理 1［解的唯一性］ 设函数 $p(x_1,x_2,z)$ 满足假设条件（A1）和（A2），则满足输出辐射条件（25）、（26）和（27）的三维 Helmholtz 方程（1）最多只有一个有界的解。

证明 设函数 $u^1(x_1,x_2,z)$ 和函数 $u^2(x_1,x_2,z)$ 是满足输出辐射条件（25）、（26）和（27）的三维 Helmholtz 方程（1）的两个有界的解，并且设函数 $u(x_1,x_2,z)=u^1(x_1,x_2,z)-u^2(x_1,x_2,z)$。很明显，函数 $u(x_1,x_2,z)$ 是方程（28）的一个有界的解且满足输出辐射条件（25）、（26）和（27）。

由（32）式，有

$$\frac{1}{\pi\sqrt{r}}\int_{-\infty}^{+\infty}j_m(r,\lambda)\int_0^{R'}j_m(\rho,\lambda)\sqrt{\rho}u(\rho,\theta,z)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\chi_m(\lambda)+\int_{\Omega_{R'}}G\psi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_{\partial\Omega_{R'}}\left(u\frac{\partial G}{\partial\nu}-G\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}s=$$

$$\int_{\partial\Omega_{R'}}\left[u\left(\frac{\partial G}{\partial\nu}-\mathrm{i}\sqrt{k^2n_{co}^2-\lambda}G\right)-G\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}-\mathrm{i}\sqrt{k^2n_{co}^2-\lambda}u\right)\right]\mathrm{d}s\tag{34}$$

由三角不等式和 Cauchy-Schwartz 不等式，我们得到（34）式的右边如下：

$$\int_{\partial\Omega_{R'}}\left[u\left(\frac{\partial G}{\partial\nu}-\mathrm{i}\sqrt{k^2n_{co}^2-\lambda}G\right)-G\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}-\mathrm{i}\sqrt{k^2n_{co}^2-\lambda}u\right)\right]\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\left(\int_{\partial\Omega_{R'}}|u|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\partial\Omega_{R'}}\left|\frac{\partial G}{\partial\nu}-\mathrm{i}\sqrt{k^2n_{co}^2-\lambda}G\right|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left(\int_{\partial\Omega_{R'}}|G|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\partial\Omega_{R'}}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}-\mathrm{i}\sqrt{k^2n_{co}^2-\lambda}u\right|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}=I_1+I_2$$

由（9）式，并且由于函数 $j_m(r,\lambda)$ 是有界的，很容易得到

$$I_1\to0,I_2\to0,\quad 当\ R'\to\infty$$

因此，得到（34）式的右边趋于 0，当 $R'\to\infty$。

由文［8-9］和 Fubini-Tonelli 定理，可以得到（34）式的左边如下：

$$\frac{1}{\pi\sqrt{r}}\int_{-\infty}^{+\infty}j_m(r,\lambda)\int_0^{R'}j_m(\rho,\lambda)\sqrt{\rho}u(\rho,\theta,z)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\chi_m(\lambda)+$$

$$\int_{\Omega_{R'}} G\psi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \to u(r',\theta',\zeta) +$$

$\int_{\mathrm{R}^3} G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)p(r,\theta,z)u(r,\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ 当 $R' \to \infty$

因此，在（34）式中两边当 $R' \to \infty$ 取极限，可以得到

$$u(r',\theta',\zeta) + \int_{\mathrm{R}^3} G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)p(r,\theta,z)\cdot u(r,\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = 0 \tag{35}$$

由于函数 $u(r,\theta,z)$ 有界，并且设 $M = \sup\limits_{(r,\theta,z)\in\mathbf{R}^3} |u(r,\theta,z)|$，由上述公式（35），有

$$M \leqslant M \sup_{(r',\theta',\zeta)\in\mathbf{R}^3}\int_{\mathrm{R}^3} |G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)\cdot p(r,\theta,z)| r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{36}$$

又由（3）式和上述不等式（36），可以得到 $M = 0$，即：$u^1(x_1,x_2,z) = u^2(x_1,x_2,z)$。

2.2　三维 Helmholtz 方程在扰动的共轴波导上的解的存在性

在研究三维 Helmholtz 方程（1）的解的存在性之前，我们先给出如下两个引理。

引理 7　设 $\Psi(r',\theta',\zeta)$ 是一个复值函数并且满足假设条件（A1），则函数

$$w(r,\theta,z) = \int_{\mathrm{R}^3} G(r,\theta,z;r',\theta',\zeta)\Psi(r',\theta',\zeta)r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\zeta$$

满足

$$\lim_{r\to\infty}\left\{j_m(r,\lambda)\frac{\partial[\sqrt{r}w(r,\theta,z)]}{\partial r} - \frac{\partial j_m(r,\lambda)}{\partial r}[\sqrt{r}w(r,\theta,z)]\right\} = 0$$

证明　由引理 1 和假设条件（A1），我们很容易得到此引理。

引理 8　设 $\Psi(r',\theta',\zeta)$ 是一个复值函数并且满足假设条件（A1），则函数

$$\bar{w}(\lambda,\theta,z) = \int_{\mathrm{R}^3} \bar{G}(\lambda,\theta,z;r',\theta',\zeta)\Psi(r',\theta',\zeta)r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\zeta$$

满足

$$\begin{cases}\lim\limits_{|z|\to\infty}\left[\dfrac{\partial\bar{w}(\lambda,\theta,z)}{\partial|z|} - \mathrm{i}\sqrt{k^2n_{co}^2 - \lambda}\,\bar{w}(\lambda,\theta,z)\right] = 0, \\ \lambda \leqslant k^2n_{co}^2 \text{ 和 } \mathrm{d}\chi_m(\lambda) \neq 0, \\ \lim\limits_{|z|\to\infty}\bar{w}(\lambda,\theta,z) = 0, \lambda > k^2n_{co}^2\end{cases}$$

证明　由引理 2 和假设条件（A1），很容易得到此引理。

考虑满足输出辐射条件（25）、（26）和（27）的三维 Helmholtz 方程（1）的解的存在性，则得到如下结果。

定理 2［解的存在性］　设函数 $f(x_1,x_2,z) \in L^2(\mathbf{R}^3)$ 和函数 $p(x_1,x_2,z) \in L^2(\mathbf{R}^3)$，并且都满足假设条件（A1）和（A2），则满足输出辐射条件（25）、（26）和（27）的三维 Helmholtz 方程（1）至少存在一个有界的解。

特别地，这个解是如下积分方程唯一的有界的解：

$$u(x_1,x_2,z) = \int_{\mathrm{R}^3} G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)[f(\xi_1,\xi_2,\zeta) - p(\xi_1,\xi_2,\zeta)u(\xi_1,\xi_2,\zeta)]\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\zeta \tag{37}$$

证明　首先，证明函数 $u(x_1,x_2,z)$ 有界，然后证明它满足输出辐射条件（25）、（26）和（27）。

一方面，我们有

$$\int_{\mathrm{R}^3} G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)f(\xi_1,\xi_2,\zeta)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\zeta = \int_{B_1(x_1,x_2,z)} G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)f(\xi_1,\xi_2,\zeta)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\zeta + \int_{\mathrm{R}^3\setminus B_1(x_1,x_2,z)} G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)f(\xi_1,\xi_2,\zeta)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\zeta = J_1 + J_2 \tag{38}$$

其中 $B_1(x_1,x_2,z) = \{(x_1,x_2,z) \in \mathbf{R}^3 | (x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (z-\zeta)^2 \leqslant 1\}$。

由引理 3 和（9）式，我们可知，在相差一个常数倍的情况下，$|J_1|$ 相当于

$$\int_{B_1(x_1,x_2,z)} \frac{|f(\xi_1,\xi_2,\zeta)|}{|P-P'|}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\zeta$$

由 Hölder 不等式，我们估计 $|J_1|^2$。

$$\left(\int_{B_1(x_1,x_2,z)} \frac{|f(\xi_1,\xi_2,\zeta)|}{|P-P'|}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\zeta\right)^2 \leqslant \int_{B_1(x_1,x_2,z)} |f(\xi_1,\xi_2,\zeta)|^2\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\zeta\cdot\int_{B_1(x_1,x_2,z)} \frac{1}{|P-P'|^2}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\zeta = 4\pi\int_{B_1(x_1,x_2,z)} |f(\xi_1,\xi_2,\zeta)|^2\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\zeta$$

因为函数 $f(x_1,x_2,z) \in L^2(\mathbf{R}^3)$，所以，（38）式右边的第一个积分 J_1 有界。

由引理 1，引理 2 和引理 3，我们知道函数 $G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)$ 在 $B_1(x_1,x_2,z)$ 之外有界，又由函数 $f(x_1,x_2,z)$ 满足假设条件（A1），因此，（38）式右边的第二个积分 J_2 有界。

于是我们就证明了函数 $\int_{\mathrm{R}^3} G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)f(\xi_1,\xi_2,\zeta)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\zeta$ 有界。

由（3）式和压缩影像原理，我们立即可得到函数 $u(x_1,x_2,z)$ 有界。

另一方面，接下来我们证明函数 $u(x_1,x_2,z)$ 满足输出辐射条件（25）、（26）和（27）。由于函数 $u(x_1,x_2,z)$ 有界，并且由于函数 $f(x_1,x_2,z)$ 和函数 $p(x_1,x_2,z)$ 都满足假设条件（A1）和（A2），再根据引理 7 和引理 8，我们立即可得到此结论。

参考文献：

[1] LIU L, QIN Y, XU Y, et al. A uniqueness and existence of solutions for the 3-D Helmholtz equation in a stratified medium with unbounded perturbation [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2013, 36: 2033 – 2047.

[2] XU Y. Scattering of acoustic waves by an obstacle in a stratified medium [J]. Partial differential equations with real analysis, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 1992, 263: 147 – 168.

[3] XU Y. Radiation condition and scattering problem for time-harmonic acoustic waves in a stratified medium with a non-stratified inhomogeneity [J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1995, 54: 9 – 29.

[4] FINK Y, RIPIN D, FAN S, et al. Guiding optical light in air using an all-dielectric structure [J]. Journal of Lightwave Technology, 1999, 17: 2039 – 2041.

[5] IBANESCU M, FINK Y, FAN S, et al. An all-dielectric coaxial waveguide [J]. Science, 2000, 289: 415 – 419.

[6] ALEXANDROV O, CIRAOLO G. Wave propagation in a 3-D optical waveguide [J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2004, 14: 819 – 852.

[7] ALEXANDROV O, CIRAOLO G. Wave propagation in a 3-D optical waveguide II: Numerical results [C]//Proceedings of the 5th International Congress of the ISAAC held in Catania, 2005.

[8] CODDINGTON E A, LEVINSON N. Theory of ordinary differential equations [M]. New York: McGraw-Hill, 1955.

[9] TITCHMARSH E C. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations [M]. Oxford: Oxford at the Clarendon Press, 1946.

[10] ABRAMOWITZ M, STEGUN I A. Handbook of mathematical functions [M]. New York: Dover, 1972.

[11] MAGNUS W, OBERHETTINGER F, SONI R. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics [M]. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1966.

[12] CIRAOLO G. Non-rectilinear waveguides: analytical and numerical results based on the Green's function [D]. Ph D Thesis, http://www.math.unipa.it/~g.ciraolo/

[13] ADAMS R, FOURIER J. Sobolev spaces [M]. New York: Academic Press, 2003.

[14] GILBARG D, TRUDINGER N. Elliptic partial differential equations of second order [M]. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.

（上接第 34 页）

[8] NISHIZAWA H, YAMAGUCHI H, SUZUKI H, et al. Friction characteristics analysis for clamping force setup in metal V-belt type CVT[M]. SAE Technical, 2005, doi: 10.4271:1462.

[9] PULLES R.J, BONSEN B, STEINBUCH M, et al. Slip controller design and implementation in a continuously variable transmission[C]// American Control Conference, Portland, Oregon, 2005:1756.

[10] BONSEN B, KLAASSEN T W G L, VAN K G O. Measurement and control of slip in a continuously variable transmission[C]// Mechatronics 2004, Sydney, Australia, 2004.

[11] 高帅. 无级变速器电液控制系统开发及关键技术研究[D]. 长春：吉林大学，2012.